

ЛЕКЦИЯ 12.
Затухающие колебания.
Вынужденные колебания.

А.И. Валишев, В.Г. Сербо.

Общие утверждения.

У. Действие силы трения сопровождается уменьшением энергии осциллятора, выделением тепла, приводит к затуханию колебаний.

Колебания с трением с необходимостью затухающие колебания.

У. Напротив. Вынуждающая периодическая, в частности синусоидальная сила приводит к раскачке колебаний.

Установившиеся, с постоянной амплитудой, колебания под действием вынуждающей силы являются вынужденными колебаниями.

22.3. Затухающие колебания.

22.3.1 Простая модель –линейный осциллятор с трением.

Рассматривается одномерное движение.

Считается: сила трения пропорциональна скорости –

$$F_{\text{тр}} = - \alpha \cdot v = - \alpha \cdot dx/dt .$$

Записывается уравнение движения:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} , \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} , \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m} ;$$
$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 .$$

Введены: λ - коэффициент затухания,

ω_0 – частота (собственная) свободных колебаний.

После подстановки $x(t) = \text{Re}(e^{\gamma t})$ имеем

характеристическое уравнение:

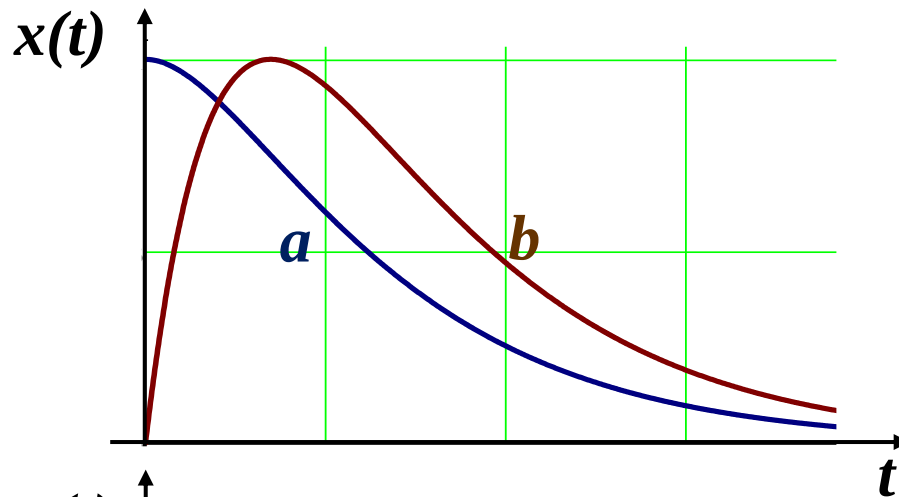
$$\gamma^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 .$$

Корни уравнения: $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} .$

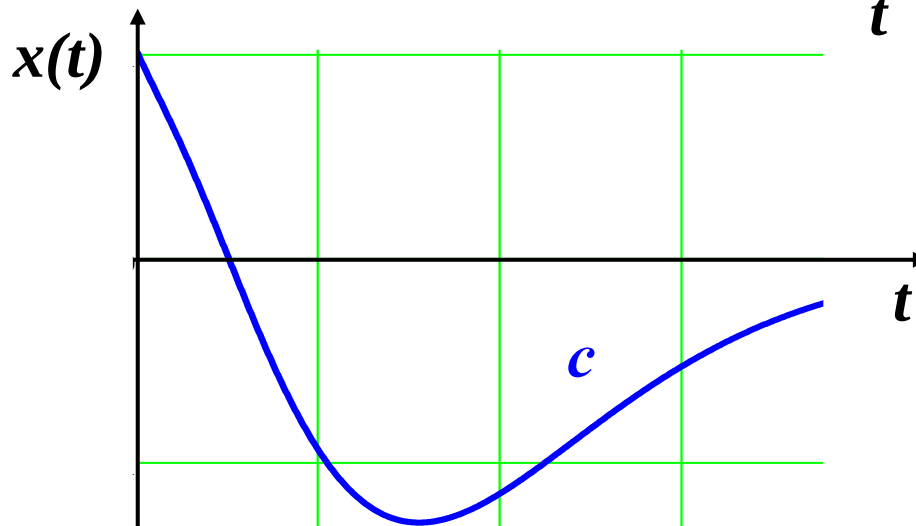
Общее решение: $x(t) = \operatorname{Re}\{c_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 e^{\gamma_2 t}\}$.

22.3.2. Анализ решения.

При $\lambda > \omega_0$ – аperiодическое затухание. $x \sim e^{-\kappa t}$.



- a) $x(0) > 0$, $dx/dt|_0 = 0$;
b) $x(0) = 0$, $dx/dt|_0 > 0$.



- c) $x(0) > 0$, $dx/dt|_0 < 0$.

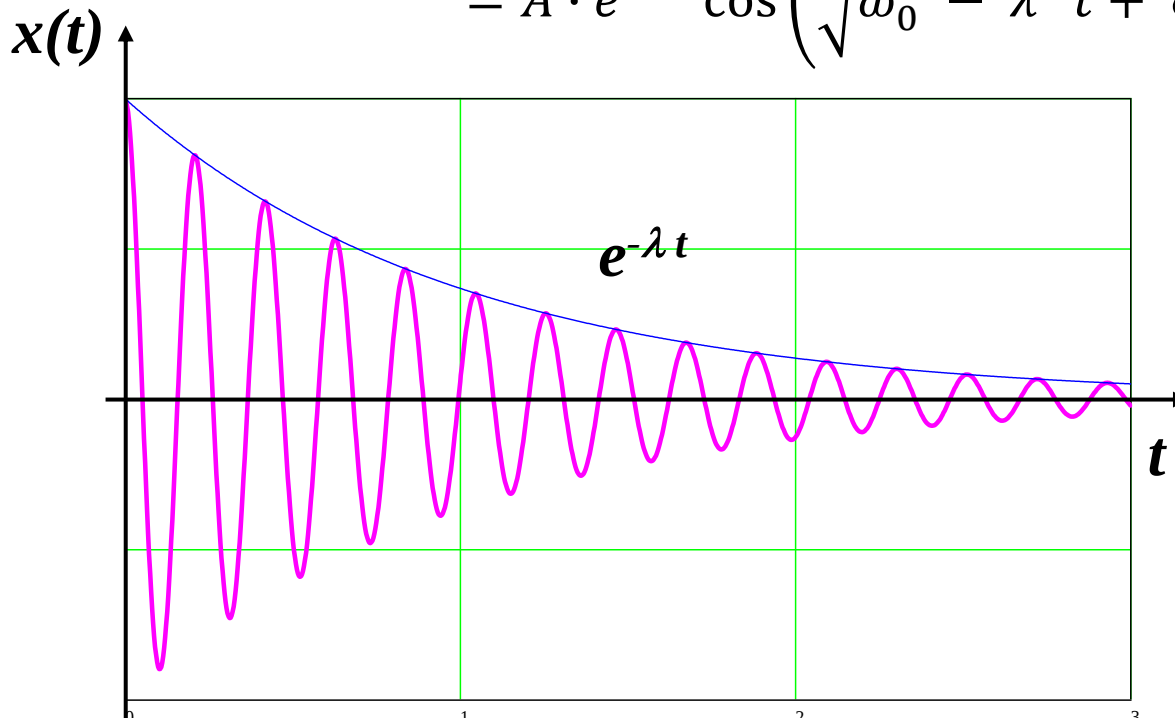
Nb. Совершается не более одного колебания

22.3.3. Затухающие колебания.

В случае $\lambda < \omega_0$, $\rightarrow \gamma_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

Общее решение:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}\{c_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 e^{\gamma_2 t}\} = \\ &= \operatorname{Re}\left\{c_1 e^{-\lambda t + i\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)t} + c_2 e^{-\lambda t - i\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)t}\right\} = \\ &= A \cdot e^{-\lambda t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + \varphi\right). \end{aligned}$$

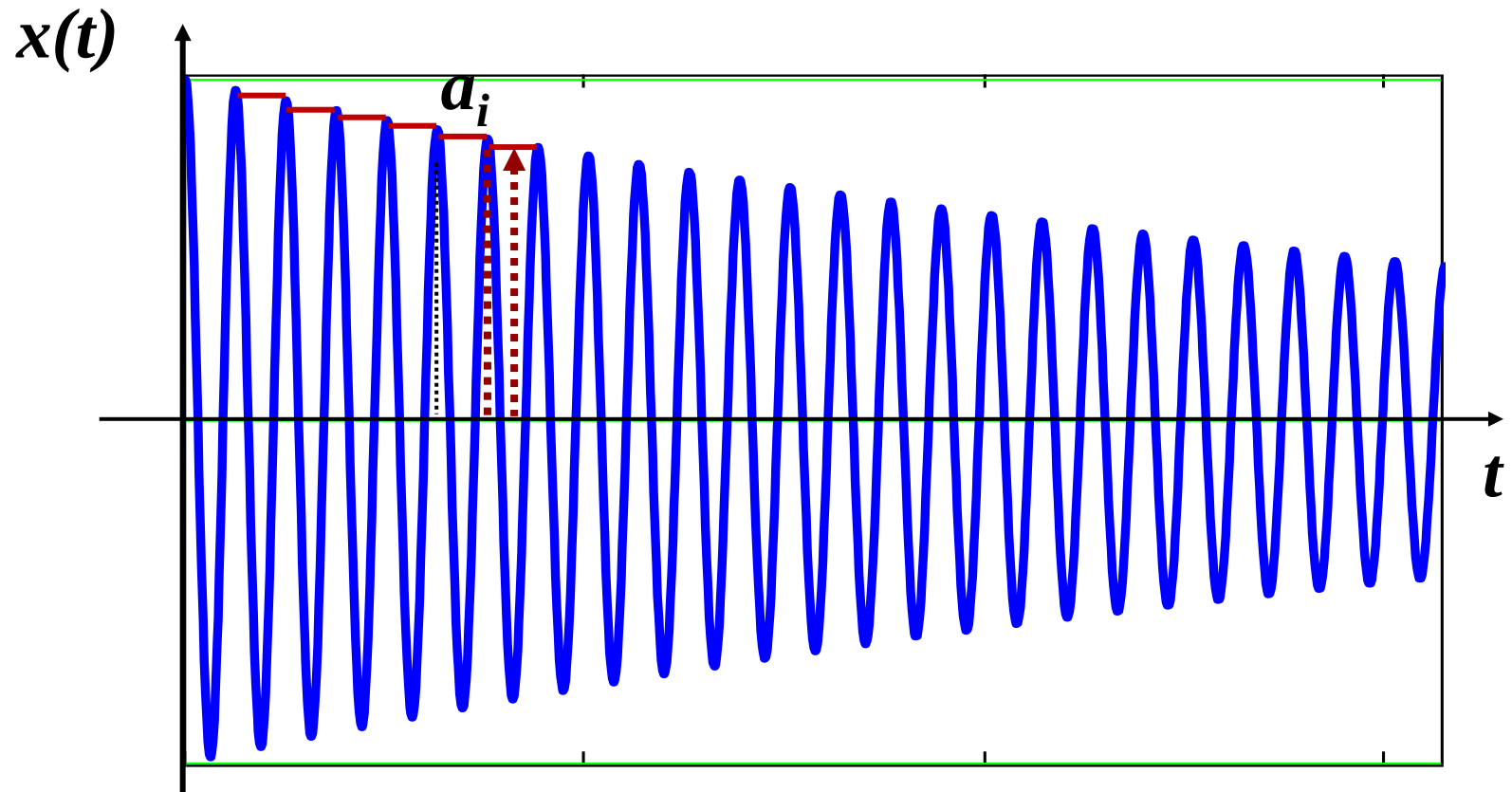


Замечание.

! Частота затухающих колебаний не равна собственной частоте осциллятора.

$$\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \neq \omega_0$$

22.3.3. График. Затухающие колебания в случае малого затухания $\lambda \ll \omega_0$.



$$x(t) = \mathbf{a} \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \cos(\omega t)$$

Характерное время затухания колебаний:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} .$$

Характерным временем называется время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в $e = 2,7128..$ раз .

Упражнение.

**В случае малого затухания, при $\lambda \ll \omega_0$ показать, что амплитуда колебаний – $A \propto e^{-\lambda t}$;
средние за период потенциальная U , кинетическая энергия T :**

$$U, T \propto e^{-2\lambda t} .$$

Полная энергия меняется по закону:

$$E = E_0 \cdot e^{-2\lambda t} .$$

23. Вынужденные колебания.

Решается неоднородное уравнение колебаний с трением.
В правой части уравнения колебаний вынуждающая внешняя сила:

$$\begin{aligned} F(t) &= f \cdot \cos(\omega t + \varphi): \\ m\ddot{x} &= -kx - \alpha\dot{x} + f \cdot \cos(\omega t + \varphi), \\ \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{f}{m} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (X)$$

Общее решение неоднородного уравнения согласно общим правилам:

$$x(t) = x_{\text{однородн.}}(t) + x_{\text{частное неоднородн.}}(t)$$

Утверждение. Решение уравнения (X) в установившемся режиме, (установившийся при времени $t \gg 1/\lambda$), зависит от частоты вынуждающей силы ω , а также от амплитуды силы. Решение следует искать в виде:

$$x(t) = b \cdot \cos(\omega t + \varphi + \delta).$$

Вопрос. Почему установившийся режим при $t \gg 1/\lambda$.

Замечание.

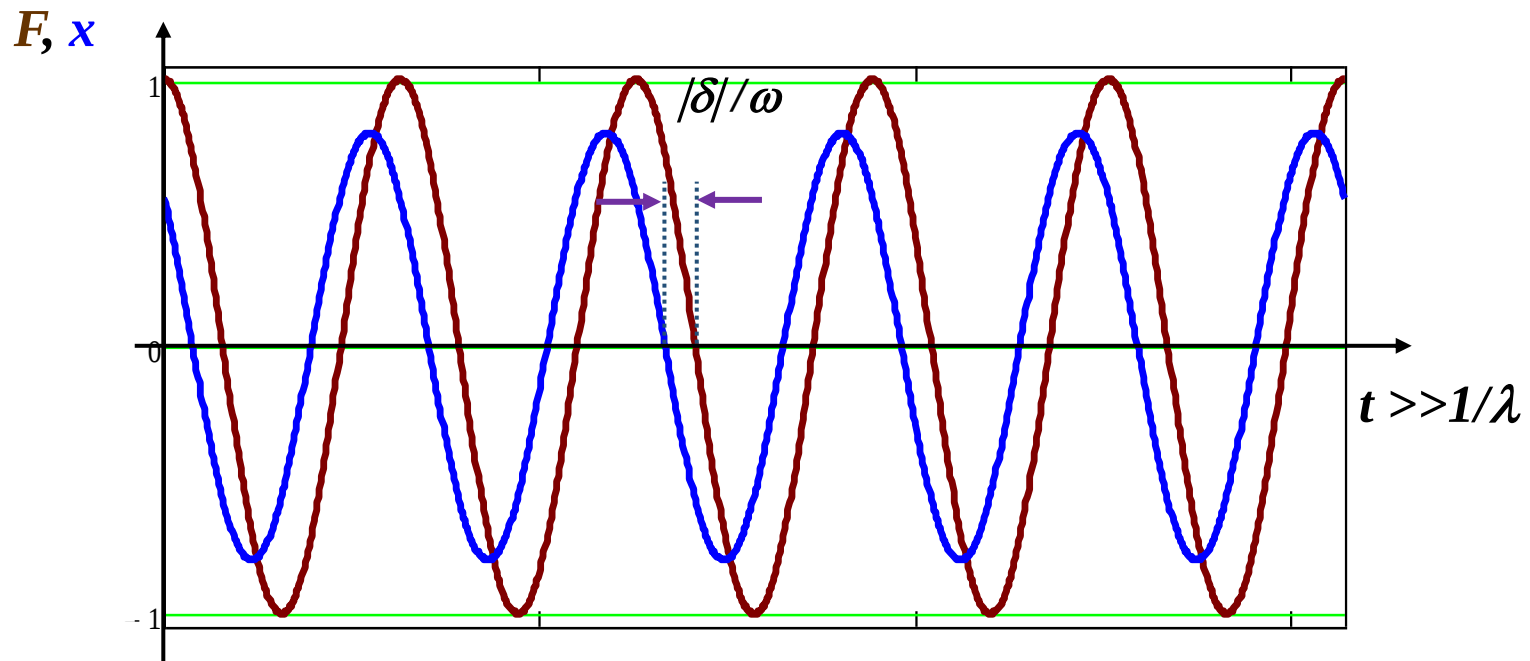
Решение однородного уравнения $x_{\text{однородн.}}(t)$ вследствие действия силы трения затухает со временем экспоненциально.

$x_{\text{однородн.}}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Следовательно при $t \gg 1/\lambda \rightarrow$

$$x(t) = x_{\text{частное неоднородн.}}(t).$$

Определим δ - сдвиг фазы между вынуждающей силой F и смещением x – отклик осциллятора.



Используется действительная часть решения:

$$\cos(\omega t + \varphi + \delta) = \operatorname{Re} \{e^{i(\omega t + \varphi + \delta)}\}.$$

Подстановка $x(t) = be^{i(\omega t + \varphi + \delta)}$ в уравнение (X) дает характеристическое уравнение:

$$b e^{i\delta}(-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2) = f/m, \quad (**)$$

Обозначив комплексную амплитуду $B = b \cdot e^{i\delta}$, находим:

$$B = be^{i\delta} = \frac{f}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega)}.$$

В комплексной амплитуде выделим модуль $|B| = b$ и фазу δ .

$$\begin{aligned} B = be^{i\delta} &= \frac{f}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega)} = \\ &= \frac{f}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega)} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega)} = \\ &= \frac{f}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}; \end{aligned}$$

Окончательно:

$$b(\omega) = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2}} ,$$

$$\operatorname{ctg} \delta(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\lambda\omega} .$$

Запишем b , δ в безразмерных переменных:

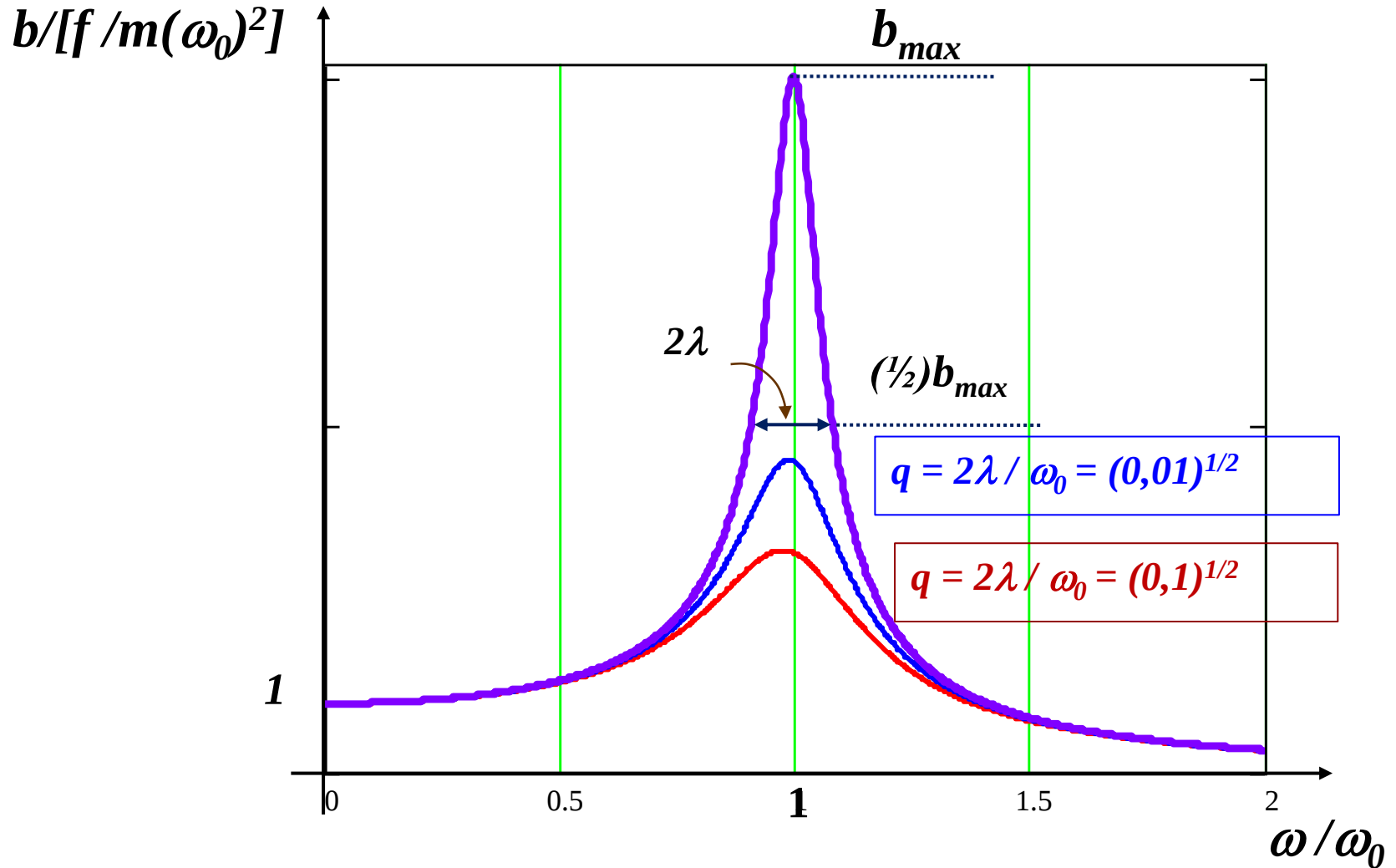
$$\xi = \frac{\omega}{\omega_0} , \quad q = \frac{2\lambda}{\omega_0} :$$

$$b(\xi) = \frac{f}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + q^2 \xi^2}} , \quad q = \frac{2\lambda}{\omega_0} .$$

$$\operatorname{ctg} \delta(\xi) = \frac{\xi^2 - 1}{q\xi} .$$

23.1. Представим графики зависимостей амплитуды колебаний $b(\omega)$, сдвига фазы $\delta(\omega)$ от частоты вынуждающей силы ω при заданных амплитуде вынуждающей силы f ; массе осциллятора m ; собственной частоте осциллятора ω_0 .

23.1.1. Зависимость безразмерной амплитуды $b/(f/m\omega_0^2)$ от безразмерной частоты ω/ω_0 .



23.1.1. Зависимость безразмерной амплитуды $b/(f/m\omega_0^2)$ от безразмерной частоты ω/ω_0 .

Максимум $b(\omega)$ определяется из условия:

$$\frac{db}{d\omega} = 0 ,$$

Можно показать: $\max b(\omega)$ при частоте:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2},$$

В безразмерных параметрах:

$$\xi_{\max} = \sqrt{1 - \frac{q^2}{2}} , \quad \xi_{\max} = \frac{\omega}{\omega_0} .$$

Упражнение.

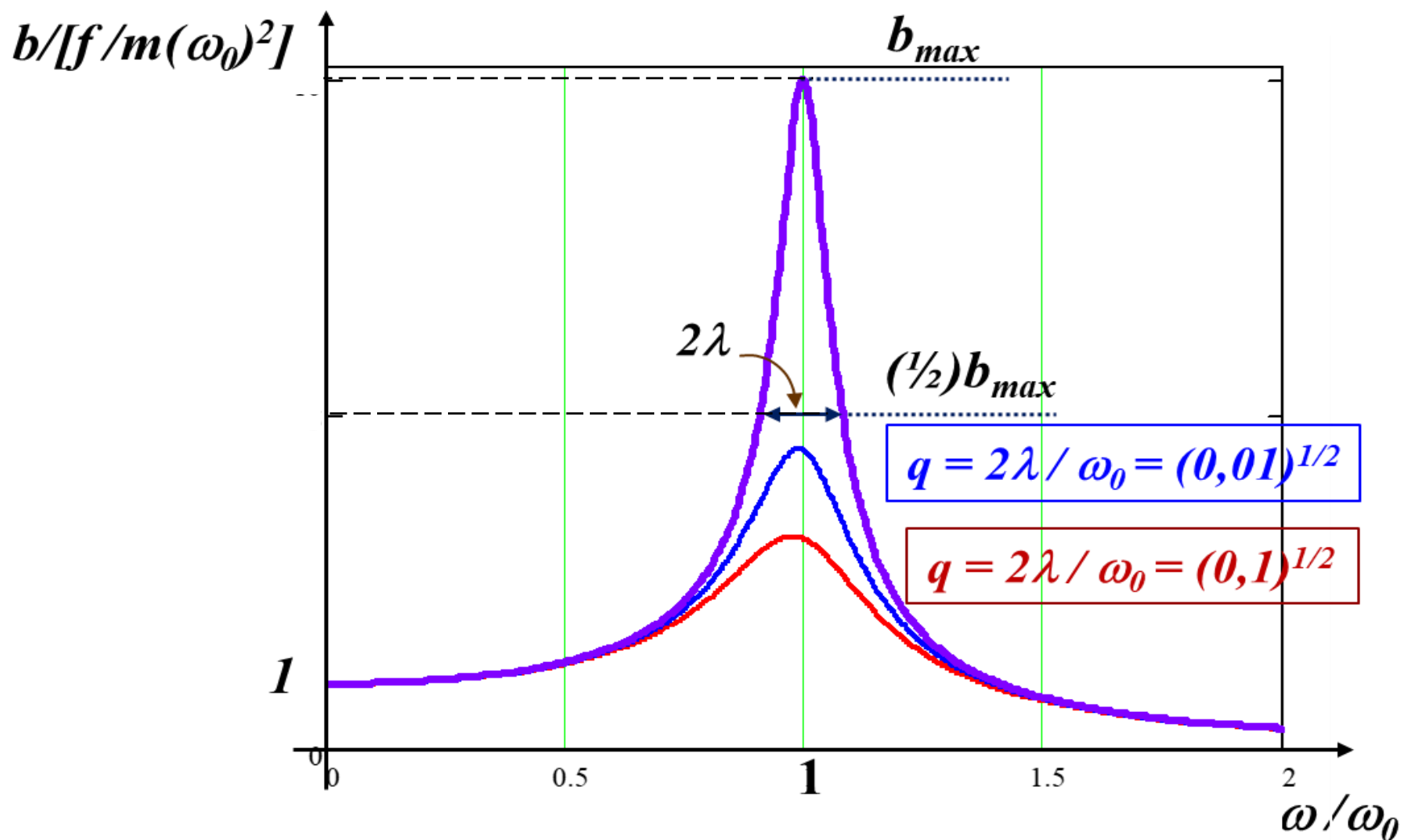
Исследовать поведение $b(\omega)$:

a) в пределе при $\omega \rightarrow 0$;

b) при $\omega \approx \omega_0$;

c) при $\omega \gg \omega_0$.

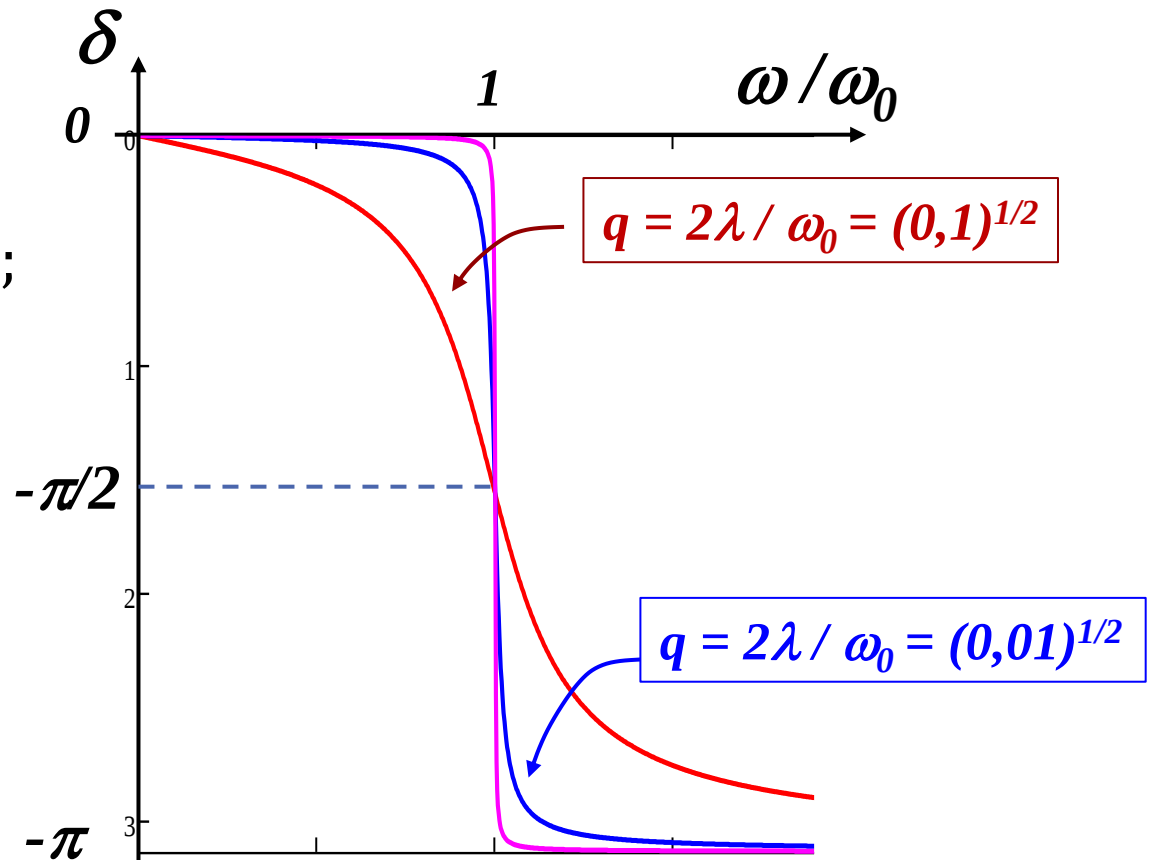
23.1.1. Зависимость амплитуды от частоты $b = b(\omega)$: называется амплитудно- частотной характеристикой осциллятора (АХЧ).



23.1.2. Зависимость сдвига фазы в от частоты вынуждающей силы $\delta(\omega)$.

$$\operatorname{ctg} \delta(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\lambda\omega} ;$$

$$\operatorname{ctg} \delta(\xi) = \frac{\xi^2 - 1}{q\xi} .$$



23.2. Предел малого затухания:

$$\lambda \ll \omega_0; \rightarrow q = 2\lambda / \omega_0 \ll 1 .$$

Выполним разложение по малости:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon, & \varepsilon \ll \omega_0, \rightarrow \\ &\rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 \approx 2\omega_0 \varepsilon; \end{aligned}$$

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2} \approx 2\omega_0 \sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2} ,$$

$$b = \frac{f}{2m\omega_0 \sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}} , \quad \operatorname{ctg} \delta = \frac{\varepsilon}{\lambda} ;$$

$$b(\varepsilon = 0) = b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0 \lambda} , \quad \frac{b(\pm\lambda)}{b_{\max}} = \frac{1}{2} .$$

Утверждение.

Характерная полуширина области резонанса по частоте равна λ !

23.2.1. Резонанс.

В пределе малого затухания $\lambda \ll \omega_0$ на частоте вынуждающей силы близкой к собственной частоте осциллятора $\omega \cong \omega_0$ амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума $b \rightarrow b_{max}$.

Наблюдается явление резонанса.

Упражнение.

Определить работу вынуждающей силы за период на резонансной частоте в случае малого затухания.

$$\omega \cong \omega_0, \lambda \ll \omega_0,$$

A_f за период ?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

<http://phys.nsu.ru/fit>

<http://el.nsu.ru>